**«Вечерняя школа г.Макинск»**

**Поурочный план**

|  |  |
| --- | --- |
| **Раздел** |  Повторение |
| **ФИО педагога** | Патиева А.М. |
| **Дата** | **17.05.2023г** |
| **Класс «10»** | **Количество присутствующих:** | **Количество отсутствующих:** |
| **Тема урока** | Виды распределения дискретных случайных величин.Закон больших чисел. |
| **Цели обучения в соответствии с учебной программой** | 10.3.2.16 - распознавать виды распределения дискретных случайных величин: биномиальное распределение, геометрическое распределение, гипергеометрическое распределение; 10.3.2.17 - знать формулировку закона больших чисел. |
| **Цель урока** | Ты узнаешь:• виды распределения дискретной случайной величины;• принцип закона больших чисел.Ты научишься:• распознавать виды распределения дискретной случайной величины;• составлять биномиальный закон распределения дискретной случайной величины;• составлять геометрический закон распределения дискретной случайной величины;• составлять гипергеометрический закон распределения дискретной случайной величины. |
| **Ход урока** |
| **Этап урока/время** | **Действия педагога** | **Действия учеников** | **Оценивание** | **Ресурсы** |
| Начало урока2мин2мин8 мин | **Настрой на урок.** **Проверка домашнего задания.** **Актуализация опорных знаний**В зависимости от того, по каким формулам вычисляются вероятности дискретных случайных величин, закон их распределения имеет свое название.***Биномиальное распределение.***Пусть производится $n$ независимых испытаний, в каждом из которых событие *А* может появиться либо не появиться. Вероятность наступления события во всех испытаниях постоянна и равна $p$ (следовательно, вероятность непоявления $q=1-p$). Рассмотрим в качестве дискретной случайной величины $X$ число появлений события *А* в этих испытаниях. Найдем закон распределения величины $X$. Событие *А* в $n$ испытаниях может либо не появиться, либо появиться 1 раз, либо 2 раза, ..., либо $n$ раз. Таким образом, возможные значения $X$ таковы: $x\_{1}=0$, $x\_{2}=1$, $x\_{3}=2$, …, $x\_{n+1}=n$. Найдем вероятности возможных значений, для чего воспользуемся формулой Бернулли:$P\_{n}\left(k\right)=C\_{n}^{k}p^{k}q^{n-k}$, (1)где $k=0, 1, 2, …, n$.***Биномиальным законом распределения дискретной случайной величины*** называют распределение вероятностей, определяемое формулой Бернулли. Закон назван «биномиальным» потому, что правую часть равенства (1) можно рассматривать как общий член разложения бинома Ньютона:$\left(p+q\right)^{n}=C\_{n}^{n}p^{n}+C\_{n}^{n-1}p^{n-1}q+…+C\_{n}^{k}p^{k}q^{n-k}+…+C\_{n}^{0}q^{n}$.Биномиальный закон запишем в виде таблицы:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$X$$ | 0 | 1 | … | $$k$$ | ... | $$n-1$$ | $$n$$ |
| $$P$$ | $$q^{n}$$ | $$npq^{n-1}$$ | …. | $$C\_{n}^{k}p^{k}q^{n-k}$$ | ... | $$np^{n-1}q$$ | $$p^{n}$$ |

***Геометрическое распределение.***Пусть производятся независимые испытания, в каждом из которых вероятность появления события *А* равна $p$ и, следовательно, вероятность его непоявления $q=1-p$. Испытания заканчиваются, как только появится событие *А*. Таким образом, если событие *А* появилось в $k$-м испытании, то в предшествующих $k-1$ испытаниях оно не появлялось.Рассмотрим в качестве дискретной случайной величины $X$ число испытаний, которые нужно провести до первого появления события *А*. Найдем закон распределения величины $X$. Возможными значениями $X$ являются натуральные числа: $x\_{1}=1$, $x\_{2}=2$, …Пусть в первых $k-1$ испытаниях событие *А* не наступило, а в $k$-м испытании появилось. Вероятность этого «сложного события», по теореме умножения вероятностей независимых событий,$P\left(X=k\right)=q^{k-1}p$. (2)Полагая $k=1, 2, …$ в формуле (2), получим геометрическую прогрессию с первым членом $p$ и знаменателем $q$ $\left(0<q<1\right)$:$p, qp, q^{2}p, …, q^{k-1}p, $…***Геометрическим законом распределения дискретной случайной величины*** называется распределение вероятностей, определяемое формулой (2).***Гипергеометрическое распределение***.Пусть в партии из $N$ изделий имеется $M$ стандартных $\left(M<N\right)$. Из партии случайно отбирают $n$ изделий (каждое изделие может быть извлечено с одинаковой вероятностью), причем отобранное изделие перед отбором следующего не возвращается в партию (поэтому формула Бернулли здесь неприменима). Обозначим через $X$ случайную величину – число $m$ стандартных изделий среди $n$ отобранных.Найдем вероятность того, что $X=m$, т.е. что среди $n$ отобранных изделий ровно $m$ стандартных. Общее число возможных элементарных исходов равно числу сочетаний $C\_{N}^{n}$. Число исходов, благоприятствующих событию $X=m$, равно $C\_{M}^{m}∙C\_{N-M}^{n-m}$. Тогда искомая вероятность равна $P\left(X=m\right)=\frac{C\_{M}^{m}∙C\_{N-M}^{n-m}}{C\_{N}^{n}}$. (3)***Гипергеометрическим*** ***законом распределения дискретной случайной величины*** называется распределение вероятностей, определяемое формулой$$P\left(X=m\right)=\frac{C\_{M}^{m}∙C\_{N-M}^{n-m}}{C\_{N}^{n}},$$где *N* – общее число элементов некоторой совокупности;*M* – число элементов этой совокупности, обладающих некоторым свойством;*n* – число элементов, выбранных наугад из *N* элементов;*m* – число элементов, обладающих некоторым свойством, среди выбранных *n* элементов.***Закон больших чисел.***Очевидно, что результат каждого отдельного опыта является случайной величиной, зараннее неизвестной, так как исход опыта зависит от многих случайных причин, которые зараннее нельзя учесть. Вместе с тем, средний результат при неоднократном повторении опытов становится закономерным, теряя случайный характер. Это следует из нескольких теорем, обобщенное название которых носит название *закона больших чисел*. К ним относятся теоремы Чебышева и Бернулли.**Теорема Чебышева.** При достаточно большом числе независимых опытов среднее арифметическое наблюдаемых значений случайной величины сходится по вероятности к ее математическому ожиданию.На теореме Чебышева основан широко применяемый в статистике выборочный метод, согласно которому по сравнительно небольшой случайной выборке выносят суждение, касающееся всей совокупности исследуемых объектов.Из теоремы Чебышева следует теорема Бернулли, являющаяся простейшей формой закона больших чисел.**Теорема Бернулли**. Если в каждом из $n$ независимых опытов вероятность появления события *А* постоянна и равна $p$, то при достаточно большом числе испытаний вероятность того, что модуль отклонения относительной частоты появления *А* в $n$ опытах от $p$ будет сколь угодно малым, как угодно близка к 1.Смысл теоремы Бернулли состоит в том, что при большом числе $n$ повторных независимых испытаний практически достоверно, что частость (или статистическая вероятность) события $\frac{m}{n}$ – величина случайная, как угодно мало отличается от неслучайной величины $p$ – вероятности события, т.е. практически перестает быть случайной.  | На партах у каждого ученика лежат смайлики, дети показывают свое настроение настрой на урок, выбрав смайлик. Прием «Три лица»Разбор заданий, где возникли затруднения при решении примеров.Повторение теории, необходимой к урокуРабота с учителем | Самооценка. Оценка работы всего класса учителем. | Слайд №1-3 Слайд №4-7 |
| **Закрепление**23 мин | Учащиеся решают задания по карточкам**1)** Вероятность поражения грибной болезнью кустов смородины на некотором садоводческом участке равна 0,3. Составь закон распределения числа кустов, пораженных болезнью из трех посаженных. **(**Значения вероятностей запиши в виде десятичной дроби).***Решение и объяснение:***Случайная величина $X$ – число пораженных болезнью кустов из трех имеющихся, соответствует биномиальному закону распределения (повтор испытаний с одной и той же вероятностью).Все возможные значения, которые может принять случайная величина $X$: $x\_{1}=0, x\_{2}=1, x\_{3}=2$, $x\_{4}=3$.$p=0,3$, значит $q=0,7$.Соответствующие вероятности вычисли по формуле Бернулли:$$P\left(X=0\right)=C\_{3}^{0}∙\left(0,3\right)^{0}∙\left(0,7\right)^{3}=0,343;$$$P\left(X=1\right)=C\_{3}^{1}∙\left(0,3\right)^{1}∙\left(0,7\right)^{2}=0,441;$$P\left(X=2\right)=C\_{3}^{2}∙\left(0,3\right)^{2}∙\left(0,7\right)^{1}=0,189;$$P\left(X=3\right)=C\_{3}^{3}∙\left(0,3\right)^{3}∙\left(0,7\right)^{0}=0,027.$Таким образом, таблица распределения вероятностей случайной величины $X$ **–** числа пораженных болезнью кустов из трех имеющихся, имеет вид:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| $$X$$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $$P$$ | 0,343 | 0,441 | 0,189 | 0,027 |

**2)**  Студент ходит переписывать самостоятельную работу до первого успеха. Вероятность успеха постоянна и равна 0,6, независимо от номера попытки. Найди вероятность того, что студент будет переписывать работу не более трех раз.**Решение и объяснение:**Случайная величина $X$ – количество переписываний студентом самостоятельной работы до первого успеха (включительно), соответствует геометрическому закону распределения.Все возможные значения, которые может принять случайная величина $X$:$x\_{1}=1, x\_{2}=2, x\_{3}=3$, $x\_{4}=4$, ..., $x\_{k}=k$, ....Вероятность события *А* = {студент будет переписывать самостоятельную работу не более трех раз} соответствует сумме вероятностей событий при $X=1$,$X=2$, $X=3$, при $k=1, 2, 3$.$p=0,6$, значит, $q=0,4$.Соответствующие вероятности вычисли по формуле $P\left(X=k\right)=q^{k-1}p$:$$P\left(X=1\right)=0,6;$$$$P\left(X=2\right)=\left(0,6\right)^{1}∙0,4=0,24;$$$P\left(X=3\right)=\left(0,6\right)^{2}∙0,4=0,144.$Тогда $P\left(A\right)=P\left(X=1\right)+P\left(X=2\right)+P\left(X=3\right)=0,6+0,24+0,144=0,984$.$P\left(A\right)=0,984$.**3)**  Из 15 конструкторов LEGO в магазине четыре конструктора серии LEGO DUPLO. Для детского сада случайным образом приобретают 12 конструкторов LEGO. Случайная величина X – число конструкторов серии LEGO DUPLO в покупке.Найди:1) закон распределения случайной величины X (значения вероятностей запиши в виде обыкновенной несократимой дроби);2) вероятность события А = {в покупке не более одного конструктора серии LEGO DUPLO}.**Решение и объяснение:**Случайная величина $X$ – число конструкторов серии LEGO DUPLO в покупке, соответствует гипергеометрическому закону распределения, где $N=15$, $M=4$, $n=12$, $m=1, 2, 3, 4$. Случайная величина не может принять значение, равное 0, так как 12 конструкторов приобрести без конструкторов серии LEGO DUPLO невозможно. Вычисли вероятности случайных событий:$$P\left(X=1\right)= \frac{C\_{11}^{11}∙C\_{4}^{1}}{C\_{15}^{12}}=\frac{4}{455};$$$$P\left(X=2\right)= \frac{C\_{11}^{10}∙C\_{4}^{2}}{C\_{15}^{4}}=\frac{66}{455};$$$$P\left(X=3\right)= \frac{C\_{11}^{9}∙C\_{4}^{3}}{C\_{15}^{4}}=\frac{44}{91};$$$$P\left(X=4\right)= \frac{C\_{11}^{8}∙C\_{4}^{4}}{C\_{15}^{4}}=\frac{33}{91}.$$Таким образом, таблица распределения вероятностей случайной величины $X$ **–** число конструкторов серии LEGO DUPLO в покупке, имеет вид:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| $$X$$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $$P$$ | $$\frac{4}{455}$$ | $$\frac{66}{455}$$ | $$\frac{44}{91}$$ | $$\frac{33}{91}$$ |

Вероятность события *А* = {в покупке не более одного конструктора серии LEGO DUPLO} соответствует значению случайной величины при $X=1$, т.е.$$P\left(A\right)=P\left(X=1\right)=\frac{4}{455}.$$**4)**  Учитель задает учащемуся вопросы, пока тот правильно отвечает. Как только ученик ответит неправильно, учитель прекращает задавать вопросы. Вероятность правильного ответа на один вопрос равна $\frac{3}{4}$. Случайная величина $X$ – число заданных учащемуся вопросов. Найди закон распределения случайной величины $X$. Вероятность $P\left(X=k\right)$ запиши в виде $q^{k-1}∙p$.**Решение и объяснение:**Случайная величина $X$ – число заданных учащемуся вопросов, соответствует геометрическому закону распределения.Все возможные значения, которые может принять случайная величина $X$: $$x\_{1}=1, x\_{2}=2, x\_{3}=3,…, x\_{k}=k, …$$$p=\frac{1}{4}$, значит, $q=\frac{3}{4}$.Соответствующие вероятности вычисли по формуле $P\left(X=k\right)=q^{k-1}p$:$$P\left(X=1\right)=\frac{1}{4};$$$$P\left(X=2\right)=\left(\frac{3}{4}\right)^{1}∙\frac{1}{4}=\frac{3}{16};$$$$P\left(X=3\right)=\left(\frac{3}{4}\right)^{2}∙\frac{1}{4}=\frac{9}{64};$$*…………………………………*$$P\left(X=k\right)=\left(\frac{ 3}{4}\right)^{k-1}∙\frac{1}{4};$$*…………………………………*Таким образом, таблица распределения вероятностей случайной величины $X$ **–** числа заданных учащемуся вопросов, имеет вид:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$X$$ | 1 | 2 | 3 | … | $$k$$ | … |
| $$P$$ | $$\frac{1}{4}$$ | $$\frac{3}{16}$$ | $$\frac{9}{64}$$ | … | $$\left(\frac{ 3}{4}\right)^{k-1}∙\frac{1}{4}$$ | … |

**4)**  В рекламных целях торговая фирма вкладывает в каждую десятую единицу товара денежный приз размером 1000 тенге. Случайная величина $X$ – размер выигрыша при четырех сделанных покупках.Найди:1) закон распределения случайной величины $X$ **(**значения вероятностей запиши в виде десятичной дроби);2) вероятность события *А* = {выигрыш составит не более 2000 тенге}.**Решение и объяснение:**Случайная величина $X$ – размер выигрыша при четырех сделанных покупках, соответствует биномиальному закону распределения (повтор испытаний с одной и той же вероятностью).Все возможные значения, которые может принять случайная величина $X$:$x\_{1}=0, x\_{2}=1000, x\_{3}=2000$, $x\_{4}=3000$, $x\_{5}=4000$.$p=0,1$, значит $q=0,9$.Соответствующие вероятности вычисли по формуле Бернулли:$$P\left(X=0\right)=C\_{4}^{0}∙\left(0,1\right)^{0}∙\left(0,9\right)^{4}=0,6561;$$$$P\left(X=1000\right)=C\_{4}^{1}∙\left(0,1\right)^{1}∙\left(0,9\right)^{3}=0,2916;$$$$P\left(X=2000\right)=C\_{4}^{2}∙\left(0,1\right)^{2}∙\left(0,9\right)^{2}=0,0486;$$$P\left(X=3000\right)=C\_{4}^{3}∙\left(0,1\right)^{3}∙\left(0,9\right)^{1}=0, 0036;$$P\left(X=4000\right)=C\_{4}^{4}∙\left(0,1\right)^{4}∙\left(0,9\right)^{0}=0, 0001.$Таким образом, таблица распределения вероятностей случайной величины $X$ **–** размера выигрыша при четырех сделанных покупках, имеет вид:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$X$$ | 0 | 1000 | 2000 | 3000 | 4000 |
| $$P$$ | $$0,6561$$ | $$0,2916$$ | $$0,0486$$ | $$0,0036$$ | $$0,0001$$ |

Вероятность события *А* = {выигрыш составит не более 2000 тенге}:$P\left(A\right)=P\left(X=0\right)+P\left(X=1000\right)+P\left(X=2000\right)=0,6561+0,2916+0,0486=0,9963$.Или $P\left(A\right)=1-\left(P\left(X=3000\right)+P\left(X=4000\right)\right)=0,9963$.$P\left(A\right)=0,9963$.**5)**  Из 20 жетонов, занумерованных целыми числами от 1 до 20, наудачу извлекаются 3 жетона. Случайная величина $X$ – число выбранных жетонов, номера которых кратны четырем. Найди:1) закон распределения случайной величины $X$ **(**значения вероятностей запиши в виде обыкновенной несократимой дроби);2) математическое ожидание случайной величины $X$.**Решение и объяснение:**Случайная величина $X$ – число выбранных жетонов, номера которых кратны четырем, соответствует гипергеометрическому закону распределения, где$N=20$, $M=5$, $n=3$, $m=0, 1, 2, 3$.Вычисли вероятности случайных событий:$$P\left(X=0\right)=\frac{C\_{15}^{3}∙C\_{5}^{0}}{C\_{20}^{3}}=\frac{91}{228};$$$$P\left(X=1\right)= \frac{C\_{15}^{2}∙C\_{5}^{1}}{C\_{20}^{3}}=\frac{35}{76};$$$$P\left(X=2\right)= \frac{C\_{15}^{1}∙C\_{5}^{2}}{C\_{20}^{3}}=\frac{5}{38};$$$$P\left(X=3\right)= \frac{C\_{15}^{0}∙C\_{5}^{3}}{C\_{20}^{3}}=\frac{1}{114}.$$Таким образом, таблица распределения вероятностей случайной величины $X$ **–** числа выбранных жетонов, номера которых кратны четырем, имеет вид:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| $$X$$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $$P$$ | $$\frac{91}{228}$$ | $$\frac{35}{76}$$ | $$\frac{5}{38}$$ | $$\frac{1}{114}$$ |

Воспользуйся формулой $M\left(X\right)=\sum\_{i=1}^{n}x\_{i}p\_{i}$:$$M\left(X\right)=0∙\frac{91}{228}+1∙\frac{35}{76}+2∙\frac{5}{38}+3∙\frac{1}{114}=\frac{3}{4}.$$**Опережающие задания:****№1.**  Тест состоит из четырех вопросов. На каждый вопрос приведено 4 варианта ответов, два из которых правильные. Считается, что дан верный ответ на вопрос, если отмечены оба правильных варианта. Случайная величина $X$ – число правильно отвеченных вопросов при простом угадывании.Найди закон распределения случайной величины $X$ **(**значения вероятностей запиши в виде обыкновенной несократимой дроби);математическое ожидание случайной величины $X$.  **Решение и объяснение:**Случайная величина $X$ – число правильно отвеченных вопросов при простом угадывании, соответствует биномиальному закону распределения (повтор испытаний с одной и той же вероятностью).Все возможные значения, которые может принять случайная величина $X$: $x\_{1}=0, x\_{2}=1, x\_{3}=2$, $x\_{4}=3$, $x\_{5}=4$.$p=\frac{2}{4}∙\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$, или $p=\frac{1}{С\_{4}^{2}}=\frac{1}{6}$, значит $q=\frac{5}{6}$.Соответствующие вероятности вычисли по формуле Бернулли:$$P\left(X=0\right)=C\_{4}^{0}∙\left(\frac{1}{6}\right)^{0}∙\left(\frac{5}{6}\right)^{4}=\frac{625}{1296};$$$$P\left(X=1\right)=C\_{4}^{1}∙\left(\frac{1}{6}\right)^{1}∙\left(\frac{5}{6}\right)^{3}=\frac{125}{324};$$$$P\left(X=2\right)=C\_{4}^{2}∙\left(\frac{1}{6}\right)^{2}∙\left(\frac{5}{6}\right)^{2}=\frac{25}{216};$$$$P\left(X=3\right)=C\_{4}^{3}∙\left(\frac{1}{6}\right)^{3}∙\left(\frac{5}{6}\right)^{1}=\frac{5}{324};$$$$P\left(X=4\right)=C\_{4}^{4}∙\left(\frac{1}{6}\right)^{4}∙\left(\frac{5}{6}\right)^{0}=\frac{1}{1296}.$$Таким образом, таблица распределения вероятностей дискретной случайной величины $X$ **–** числа правильно отвеченных вопросов при простом угадывании, имеет вид:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$X$$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $$P$$ | $$\frac{625}{1296}$$ | $$\frac{125}{324}$$ | $$\frac{25}{216}$$ | $$\frac{5}{324}$$ | $$\frac{1}{1296}$$ |

Вычисли $M\left(X\right)$. Для биномиального закона распределения математическое ожидание вычисляется по формуле $M\left(X\right)=np$**.**$$M\left(X\right)=4∙\frac{1}{6}=\frac{2}{3}.$$**№2.** В круг радиуса 5 помещен меньший круг радиуса $\sqrt{5}$. В большой круг случайным образом последовательно ставят 3 точки. Найди вероятность того, что как минимум две точки попадут также и в малый круг. Предполагается, что вероятность попадания точки в круг пропорциональна площади круга и не зависит от его расположения. **Решение и объяснение:***А* = {как минимум две точки попадут также и в малый круг}.Случайная величина $X$ – число поставленных точек в малом круге, соответствует биномиальному закону распределения (повтор испытаний с одной и той же вероятностью).Все возможные значения, которые может принять случайная величина $X$:$x\_{1}=0, x\_{2}=1, x\_{3}=2$, $x\_{4}=3$.$P\left(A\right)=P\left(X=2\right)+ P\left(X=3\right)$.Вероятность попадания одной точки в малый круг посчитай по формуле геометрической вероятности:$p=\frac{5π}{25π}=\frac{1}{5}=0,2$, значит, $q=0,8$.Соответствующие вероятности для $x\_{3}=2$, $x\_{4}=3$ вычисли по формуле Бернулли:$P\left(X=2\right)=C\_{3}^{2}∙\left(0,2\right)^{2}∙\left(0,8\right)^{1}=0,096;$$P\left(X=3\right)=C\_{3}^{3}∙\left(0,2\right)^{3}∙\left(0,8\right)^{0}=0, 008.$Вычисли $P\left(X\geq 2\right)$:$P\left(A\right)=P\left(X\geq 2\right)=P\left(X=2\right)+ P\left(X=3\right)=0,096+0,008=0,104$. | Показывают умение по изученной теме. Работа в парахСовместная работа с учителем.Индивидуальная работаЗадания для учащихся, работающих на опережение | Взаимооценив ание по образцу | Работа с карточками |
| Конец урока 5 мин | * **Рефлексия**
 | Оценивают свой успех на уроке | Прием «Три лица» | Слайд №8 |